



چاله‌های ریاضی - کمینه‌ی مجموع دو مربع

صورت مساله

اگر دو عدد حقیقی a و b ، همواره در برابری $3a + 4b = 12$ سازگار باشند، مقدار کمینه‌ی $a^2 + b^2$ را بیابید.

پیش از این، در تارنمای قدم (ghadam.com) به این مساله پرداختیم و ۴ روش مختلف برای حل آن آوردیم. اگر آن راه‌ها را ندیده‌اید، به‌تر است قبل از خواندن ادامه‌ی مطلب، درباره‌ی این مساله فکر کنید و نگاهی به راه حل‌ها بیاندازید. این نشانی راه حل‌ها: ghadam.com/node/4109

در هر چهار روش یاد شده، زمینه‌هایی برای خطاهای بنیادی هست. یک نمونه راه حل نادرست برای این مساله را ببینید

روزی دانش‌آموزی که دستی در مطالعه و المپیاد ریاضی داشت برای همین مساله راهی چنین پیشنهاد داد:

می‌دانیم برای هر دو عد حقیقی و مثبت a و b نابرابری‌های زیر درست‌اند:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad \text{نابرابری واسطه‌ها}$$

به سراغ نامساوی نخست می‌رویم و می‌دانیم که برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a=b$ باشد. پس داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \rightarrow a^2 + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{(a+b)^2}{2}$$

یعنی کمینه‌ی عبارت $a^2 + b^2$ برابر است با $\frac{(a+b)^2}{2}$ و این رخداد در $a=b$ پیش می‌آید. پس:

$$3a + 4b = 12 \rightarrow 3a + 4a = 12 \rightarrow a = b = \frac{12}{7} \rightarrow \min\{a^2 + b^2\} = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{\left(\frac{24}{7}\right)^2}{2} \cong 5/88$$

از شما چه پنهان این دانش‌آموز پذیرفت که مقدار کمینه کم‌تر از $5/88$ است. ولی به پرتگاه دوم افتاد. او دلیل نادرستی و ناکامی بودن استدلال خود را (که استدلالی شایع است) ندید و گناه را به گردن نابرابری‌های واسطه انداخت.

اکنون نوبت شما است. علت ناکامی استدلال او را حل‌جی کنید. اگر چاله‌ای را خوب شناسیم، بارها گرفتار آن خواهیم شد. به ویژه اگر به تشخیص خود شک دارید برای ما بفرستید. به زودی با یاری شما استدلال بالا و استدلال‌های نادرست مشابه را موشکافی خواهیم کرد. پس حداکثر تا یک هفته‌ی دیگر (تا ۱۷ دی ۹۴)، این دو مورد را برای ما بفرستید:

- علت نادرستی استدلال بالا
- استدلال‌های مشکوک یا نادرست دیگری که برای این مساله می‌شناسید

راه‌های ارسال استدلال‌های نادرست این مساله برای ما:

- ارسال نامه الکترونیک به این نشانی: info@ghadam.com
- ارسال تلگرام به این نشانی: [@ghadam_edu](https://t.me/ghadam_edu)